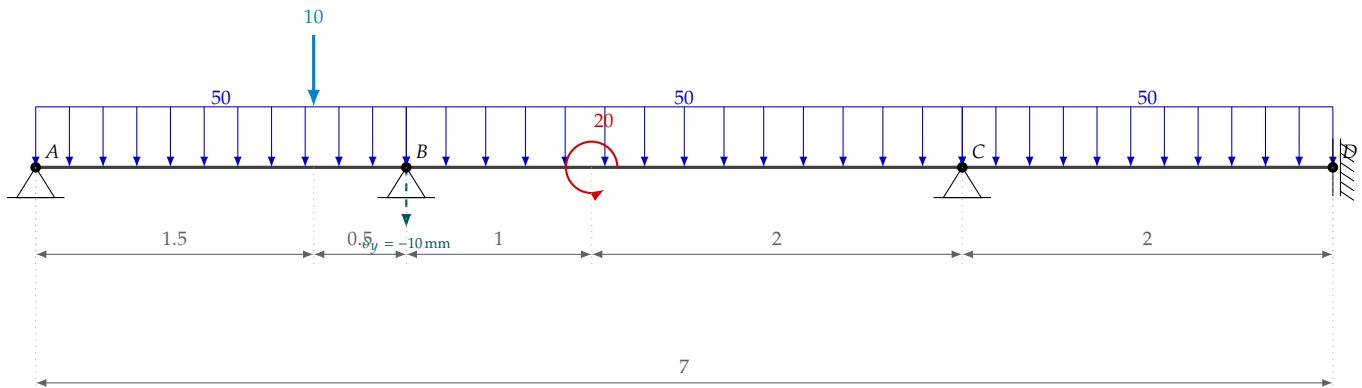


Método de Pendiente-Deflexión

VIGA

EMI · solución paso a paso

$$\hat{M}_{ij} = M_{ij}^{\text{MEP}} + \frac{2EI}{L}(2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij})$$



Estructura analizada.

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m²] A [m²] I [m⁴]

1. Grados de libertad

$\theta_A, \theta_B, \theta_C$

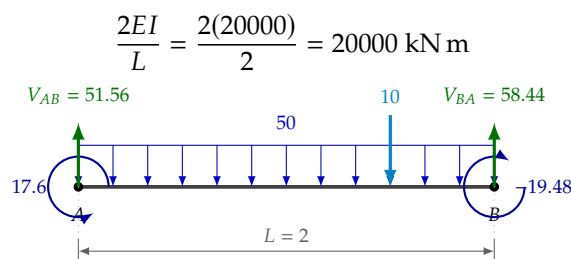


Giros incógnita en cada nudo (sentido antihorario positivo).

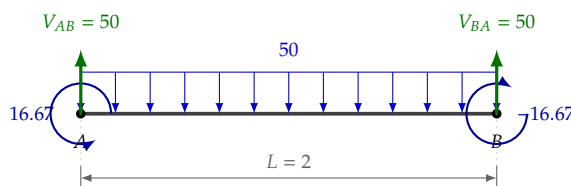
$$\psi_{AB}^0 = \frac{v_B - v_A}{L_{AB}} = -0.005, \quad \psi_{BC}^0 = \frac{v_C - v_B}{L_{BC}} = 0.003333$$

2. Rigideces y momentos de empotramiento perfecto

Barra A-B



Cuerpo libre de A-B biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).



Cuerpo libre de A-B con solo la acción 1: su MEP y su reacción de empotramiento.

$$w_1 = 50, \quad w_2 = 50 \text{ kN/m}$$

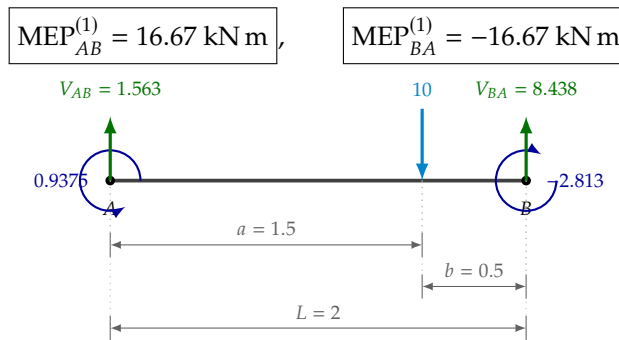
Fórmula

$$\text{MEP}_{AB}^{(1)} = +\frac{wL^2}{12}, \quad \text{MEP}_{BA}^{(1)} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$\text{MEP}_{AB}^{(1)} = +\frac{(50)(2)^2}{12}, \quad \text{MEP}_{BA}^{(1)} = -\frac{(50)(2)^2}{12}$$

Resultado de la acción 1



Cuerpo libre de A-B con solo la acción 2: su MEP y su reacción de empotramiento.

Fórmula

$$MEP_{AB}^{(2)} = +\frac{P a b^2}{L^2}, \quad MEP_{BA}^{(2)} = -\frac{P a^2 b}{L^2}$$

Reemplazo

$$MEP_{AB}^{(2)} = +\frac{(10)(1.5)(0.5)^2}{(2)^2}, \quad MEP_{BA}^{(2)} = -\frac{(10)(1.5)^2(0.5)}{(2)^2}$$

Resultado de la acción 2

$$MEP_{AB}^{(2)} = 0.9375 \text{ kN m}, \quad MEP_{BA}^{(2)} = -2.813 \text{ kN m}$$

Superposición

$$MEP_{AB} = (16.67) + (0.9375) = 17.6 \text{ kN m}$$

$$MEP_{BA} = (-16.67) + (-2.813) = -19.48 \text{ kN m}$$

Fórmula

$$V_{AB}^{(1)} = V_{BA}^{(1)} = \frac{(50)(2)}{2}$$

$$V_{AB}^{(1)} = 50 \text{ kN}, \quad V_{BA}^{(1)} = 50 \text{ kN}$$

Fórmula

$$V_{AB}^{(2)} = \frac{P b^2(3a + b)}{L^3} = \frac{(10)(0.5)^2(3(1.5) + 0.5)}{(2)^3}, \quad V_{BA}^{(2)} = \frac{P a^2(a + 3b)}{L^3} = \frac{(10)(1.5)^2(1.5 + 3(0.5))}{(2)^3}$$

$$V_{AB}^{(2)} = 1.563 \text{ kN}, \quad V_{BA}^{(2)} = 8.438 \text{ kN}$$

Superposición

$$V_{AB} = (50) + (1.563) = 51.56 \text{ kN}$$

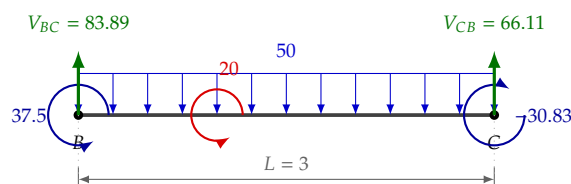
$$V_{BA} = (50) + (8.438) = 58.44 \text{ kN}$$

Comprobación

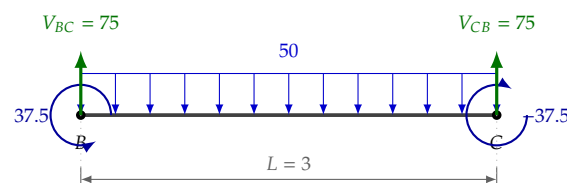
$$V_{AB} + V_{BA} = 51.56 + (58.44) = 110 \text{ kN} \checkmark$$

Barra B-C

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(20000)}{3} = 13330 \text{ kN m}$$



Cuerpo libre de B-C biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y +y' positivos).



Cuerpo libre de B-C con solo la acción 1: su MEP y su reacción de empotramiento.

$$w_1 = 50, \quad w_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Fórmula

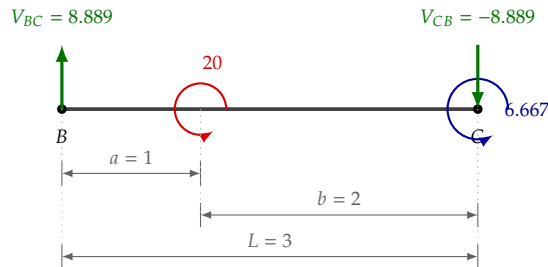
$$\text{MEP}_{BC}^{(1)} = +\frac{wL^2}{12}, \quad \text{MEP}_{CB}^{(1)} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$\text{MEP}_{BC}^{(1)} = +\frac{(50)(3)^2}{12}, \quad \text{MEP}_{CB}^{(1)} = -\frac{(50)(3)^2}{12}$$

Resultado de la acción 1

$$\boxed{\text{MEP}_{BC}^{(1)} = 37.5 \text{ kN m}}, \quad \boxed{\text{MEP}_{CB}^{(1)} = -37.5 \text{ kN m}}$$



Cuerpo libre de B-C con solo la acción 2: su MEP y su reacción de empotramiento.

Fórmula

$$\text{MEP}_{BC}^{(2)} = \frac{M_0 b (2a - b)}{L^2}, \quad \text{MEP}_{CB}^{(2)} = \frac{M_0 a (2b - a)}{L^2}$$

Reemplazo

$$\text{MEP}_{BC}^{(2)} = \frac{(20)(2)(2(1) - 2)}{(3)^2}, \quad \text{MEP}_{CB}^{(2)} = \frac{(20)(1)(2(2) - 1)}{(3)^2}$$

Resultado de la acción 2

$$\boxed{\text{MEP}_{BC}^{(2)} = 0 \text{ kN m}}, \quad \boxed{\text{MEP}_{CB}^{(2)} = 6.667 \text{ kN m}}$$

Superposición

$$\text{MEP}_{BC} = (37.5) + (0) = \boxed{37.5 \text{ kN m}}$$

$$\text{MEP}_{CB} = (-37.5) + (6.667) = \boxed{-30.83 \text{ kN m}}$$

Fórmula

$$V_{BC}^{(1)} = V_{CB}^{(1)} = \frac{(50)(3)}{2}$$

$$\boxed{V_{BC}^{(1)} = 75 \text{ kN}}, \quad \boxed{V_{CB}^{(1)} = 75 \text{ kN}}$$

Fórmula

$$V_{BC}^{(2)} = \frac{6M_0 a b}{L^3} = \frac{6(20)(1)(2)}{(3)^3}, \quad V_{CB}^{(2)} = -V_{BC}^{(2)}$$

$$\boxed{V_{BC}^{(2)} = 8.889 \text{ kN}}, \quad \boxed{V_{CB}^{(2)} = -8.889 \text{ kN}}$$

Superposición

$$V_{BC} = (75) + (8.889) = \boxed{83.89 \text{ kN}}$$

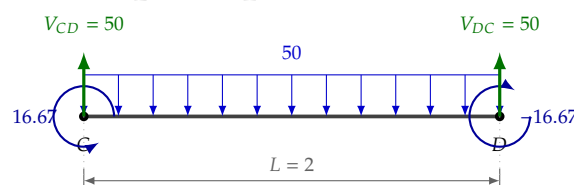
$$V_{CB} = (75) + (-8.889) = \boxed{66.11 \text{ kN}}$$

Comprobación

$$V_{BC} + V_{CB} = 83.89 + (66.11) = 150 \text{ kN } \checkmark$$

Barra C-D

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(20000)}{2} = 20000 \text{ kN m}$$



Cuerpo libre de C-D biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y +y' positivos).

$$w_1 = 50, \quad w_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Fórmula

$$MEP_{CD} = +\frac{wL^2}{12}, \quad MEP_{DC} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$MEP_{CD} = +\frac{(50)(2)^2}{12}, \quad MEP_{DC} = -\frac{(50)(2)^2}{12}$$

Resultado

$$\boxed{MEP_{CD} = 16.67 \text{ kN m}}, \quad \boxed{MEP_{DC} = -16.67 \text{ kN m}}$$

Fórmula

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{(50)(2)}{2}$$

$$\boxed{V_{CD} = 50 \text{ kN}}, \quad \boxed{V_{DC} = 50 \text{ kN}}$$

Comprobación

$$V_{CD} + V_{DC} = 50 + (50) = 100 \text{ kN } \checkmark$$

3. Ecuaciones de pendiente-deflexión de cada barra

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = 2k_{ij} (2\theta_i + \theta_j - 3\Delta_{ij}) + M_{ij}^{MEP} - 6k_{ij}\psi_{ij}^0$$

Tramo AB

$$\psi_{AB}^0 = -0.005 \quad (\text{asentamiento, paso 1})$$

$$\bullet \hat{M}_{AB} = 2k_{AB} (2\theta_A + \theta_B - 3 \cdot 0) + M_{AB}^{MEP} - 6k_{AB}\psi_{AB}^0$$

$$\hat{M}_{AB} = \frac{4EI}{2}\theta_A + \frac{2EI}{2}\theta_B + 17.6 + 300$$

$$\bullet \hat{M}_{BA} = 2k_{AB} (2\theta_B + \theta_A - 3 \cdot 0) + M_{BA}^{MEP} - 6k_{AB}\psi_{BA}^0$$

$$\hat{M}_{BA} = \frac{4EI}{2}\theta_B + \frac{2EI}{2}\theta_A - 19.48 + 300$$

Tramo BC

$$\psi_{BC}^0 = 0.003333 \quad (\text{asentamiento, paso 1})$$

$$\bullet \hat{M}_{BC} = 2k_{BC} (2\theta_B + \theta_C - 3 \cdot 0) + M_{BC}^{MEP} - 6k_{BC}\psi_{BC}^0$$

$$\hat{M}_{BC} = \frac{4EI}{3}\theta_B + \frac{2EI}{3}\theta_C + 37.5 - 133.3$$

$$\bullet \hat{M}_{CB} = 2k_{BC} (2\theta_C + \theta_B - 3 \cdot 0) + M_{CB}^{MEP} - 6k_{BC}\psi_{CB}^0$$

$$\hat{M}_{CB} = \frac{4EI}{3}\theta_C + \frac{2EI}{3}\theta_B - 30.83 - 133.3$$

Tramo CD

$$\bullet \hat{M}_{CD} = 2k_{CD} (2\theta_C + 0 - 3 \cdot 0) + M_{CD}^{MEP}$$

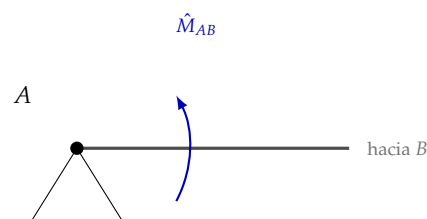
$$\hat{M}_{CD} = \frac{4EI}{2}\theta_C + 16.67$$

$$\bullet \hat{M}_{DC} = 2k_{CD} (2 \cdot 0 + \theta_C - 3 \cdot 0) + M_{DC}^{MEP}$$

$$\hat{M}_{DC} = \frac{2EI}{2}\theta_C - 16.67$$

4. Ecuaciones de equilibrio

Nudo A



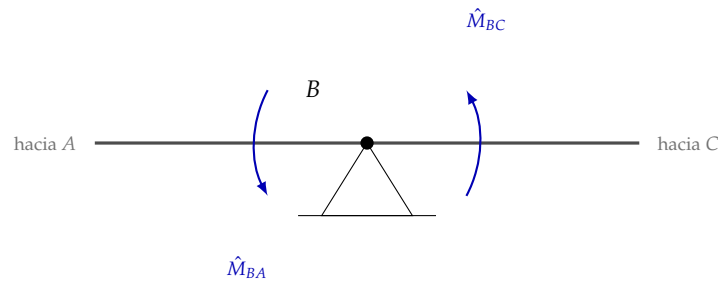
Momentos de extremo que concurren en el nudo A.

$$\hat{M}_{AB} = 0 \text{ kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B + 317.6) = 0$$

$$\rightarrow 4k_{AB}\theta_A + 2k_{AB}\theta_B = -317.6 \dots \text{(I)}$$

Nudo B



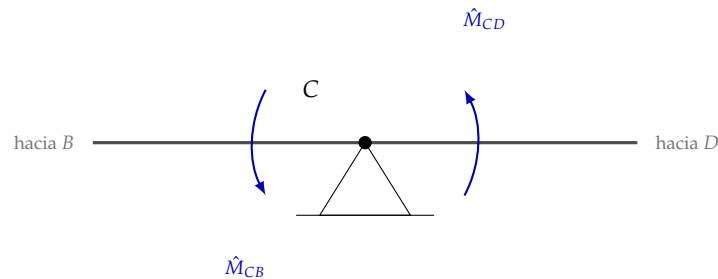
Momentos de extremo que concurren en el nudo B.

$$\hat{M}_{BA} + \hat{M}_{BC} = 0 \text{ kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{AB}\theta_B + 2k_{AB}\theta_A + 280.5) + (4k_{BC}\theta_B + 2k_{BC}\theta_C - 95.83) = 0$$

$$\rightarrow 2k_{AB}\theta_A + (4k_{AB} + 4k_{BC})\theta_B + 2k_{BC}\theta_C = -184.7 \dots \text{ (II)}$$

Nudo C



Momentos de extremo que concurren en el nudo C.

$$\hat{M}_{CB} + \hat{M}_{CD} = 0 \text{ kN m}$$

$$\rightarrow (4k_{BC}\theta_C + 2k_{BC}\theta_B - 164.2) + (4k_{CD}\theta_C + 16.67) = 0$$

$$\rightarrow 2k_{BC}\theta_B + (4k_{BC} + 4k_{CD})\theta_C = 147.5 \dots \text{ (III)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$40000\theta_A + 20000\theta_B = -317.6 \dots \text{ (I)}$$

$$20000\theta_A + 66670\theta_B + 13330\theta_C = -184.7 \dots \text{ (II)}$$

$$13330\theta_B + 66670\theta_C = 147.5 \dots \text{ (III)}$$

$$\begin{bmatrix} 40000 & 20000 & 0 \\ 20000 & 66670 & 13330 \\ 0 & 13330 & 66670 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -317.6 \\ -184.7 \\ 147.5 \end{Bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \frac{-148.5 \text{ kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{-148.5 \text{ kN m}^2}{(200 \text{ GPa})(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4)} \\ &= \frac{-148.5 \text{ kN m}^2}{20000 \text{ kN m}^2} \\ &= -0.007427 \text{ rad} \\ \theta_B &= \frac{-20.51 \text{ kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{-20.51 \text{ kN m}^2}{(200 \text{ GPa})(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4)} \\ &= \frac{-20.51 \text{ kN m}^2}{20000 \text{ kN m}^2} \\ &= -0.001026 \text{ rad} \\ \theta_C &= \frac{48.35 \text{ kN m}^2}{EI} \\ &= \frac{48.35 \text{ kN m}^2}{(200 \text{ GPa})(1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4)} \\ &= \frac{48.35 \text{ kN m}^2}{20000 \text{ kN m}^2} \\ &= 0.002418 \text{ rad} \end{aligned}$$

5. Cálculo de momentos finales

Fórmula:

$$\hat{M}_{ij} = 2k_{ij} (2\theta_i + \theta_j - 3\psi_{ij}) + M_{ij}^{\text{MEP}}$$

Cálculo: Tramo AB

$$\hat{M}_{AB} = 2(10000) (2(-0.007427) + (-0.001026) - 3(-0.005)) + 17.6$$

$$\rightarrow \hat{M}_{AB} = -17.6 + 17.6$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{AB} = 0 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{BA} = 2(10000) (2(-0.001026) + (-0.007427) - 3(-0.005)) - 19.48$$

$$\rightarrow \hat{M}_{BA} = 110.4 - 19.48$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BA} = 90.95 \text{ kN m}}$$

Tramo BC

$$\hat{M}_{BC} = 2(6667) (2(-0.001026) + (0.002418) - 3(0.003333)) + 37.5$$

$$\rightarrow \hat{M}_{BC} = -128.4 + 37.5$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{BC} = -90.95 \text{ kN m}}$$

$$\hat{M}_{CB} = 2(6667) (2(0.002418) + (-0.001026) - 3(0.003333)) - 30.83$$

$$\rightarrow \hat{M}_{CB} = -82.54 - 30.83$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CB} = -113.4 \text{ kN m}}$$

Tramo CD

$$\hat{M}_{CD} = 2(10000) (2(0.002418) + (0)) + 16.67$$

$$\rightarrow \hat{M}_{CD} = 96.71 + 16.67$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{CD} = 113.4 \text{ kN m}}$$

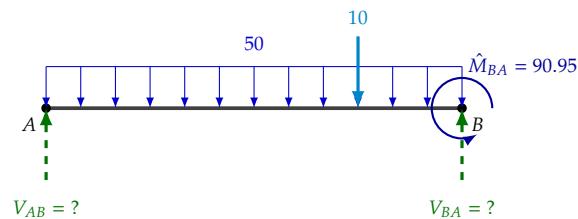
$$\hat{M}_{DC} = 2(10000) (2(0) + (0.002418)) - 16.67$$

$$\rightarrow \hat{M}_{DC} = 48.35 - 16.67$$

$$\therefore \boxed{\hat{M}_{DC} = 31.69 \text{ kN m}}$$

6. Determinación de las reacciones

Tramo AB



Cálculo:

$$(\curvearrowright +) \sum M_B = 0 \Rightarrow -V_{AB}(2) + 0 + 90.95 + 105 = 0 \quad \dots \text{(I)}$$

$$(\uparrow +) \sum F_y = 0 \Rightarrow V_{AB} + V_{BA} + (-110) = 0 \quad \dots \text{(II)}$$

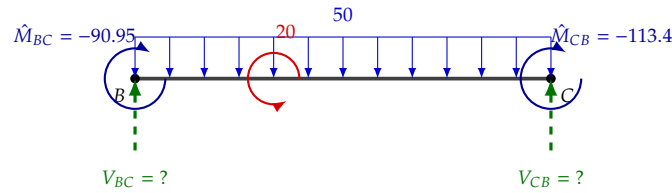
$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{0 + 90.95 + 105}{2}$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \boxed{97.97 \text{ kN}}$$

$$\Rightarrow V_{BA} = 110 - 97.97$$

$$\Rightarrow V_{BA} = \boxed{12.03 \text{ kN}}$$

Tramo BC



Cálculo:

$$(\curvearrowright +) \sum M_C = 0 \Rightarrow -V_{BC}(3) + (-90.95) + (-113.4) + 245 = 0 \quad \dots (I)$$

$$(\uparrow +) \sum F_y = 0 \Rightarrow V_{BC} + V_{CB} + (-150) = 0 \quad \dots (II)$$

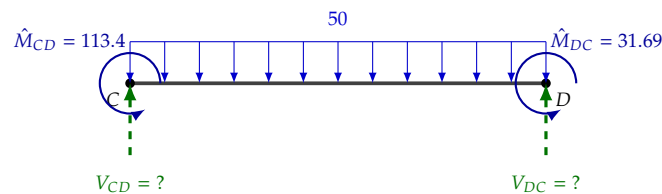
$$\Rightarrow V_{BC} = \frac{(-90.95) + (-113.4) + 245}{3}$$

$$\Rightarrow V_{BC} = 13.56 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow V_{CB} = 150 - 13.56$$

$$\Rightarrow V_{CB} = 136.4 \text{ kN}$$

Tramo CD



Cálculo:

$$(\curvearrowright +) \sum M_D = 0 \Rightarrow -V_{CD}(2) + 113.4 + 31.69 + 100 = 0 \quad \dots (I)$$

$$(\uparrow +) \sum F_y = 0 \Rightarrow V_{CD} + V_{DC} + (-100) = 0 \quad \dots (II)$$

$$\Rightarrow V_{CD} = \frac{113.4 + 31.69 + 100}{2}$$

$$\Rightarrow V_{CD} = 122.5 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow V_{DC} = 100 - 122.5$$

$$\Rightarrow V_{DC} = -22.53 \text{ kN}$$

Reacciones totales en apoyos

Fórmula:

$$R_{\text{nudo}} = \sum_{\text{tramos}} V_{\text{tramo, nudo}}$$

Cálculo: Reacciones en apoyos:

$$A_y = V_{AB} = 97.97 \text{ kN}$$

$$B_y = V_{BA} + V_{BC} = 12.03 + 13.56 = 25.59 \text{ kN}$$

$$C_y = V_{CB} + V_{CD} = 136.4 + 122.5 = 259 \text{ kN}$$

$$D_y = V_{DC} = -22.53 \text{ kN}$$

Momentos de reacción en los empotramientos

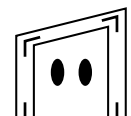
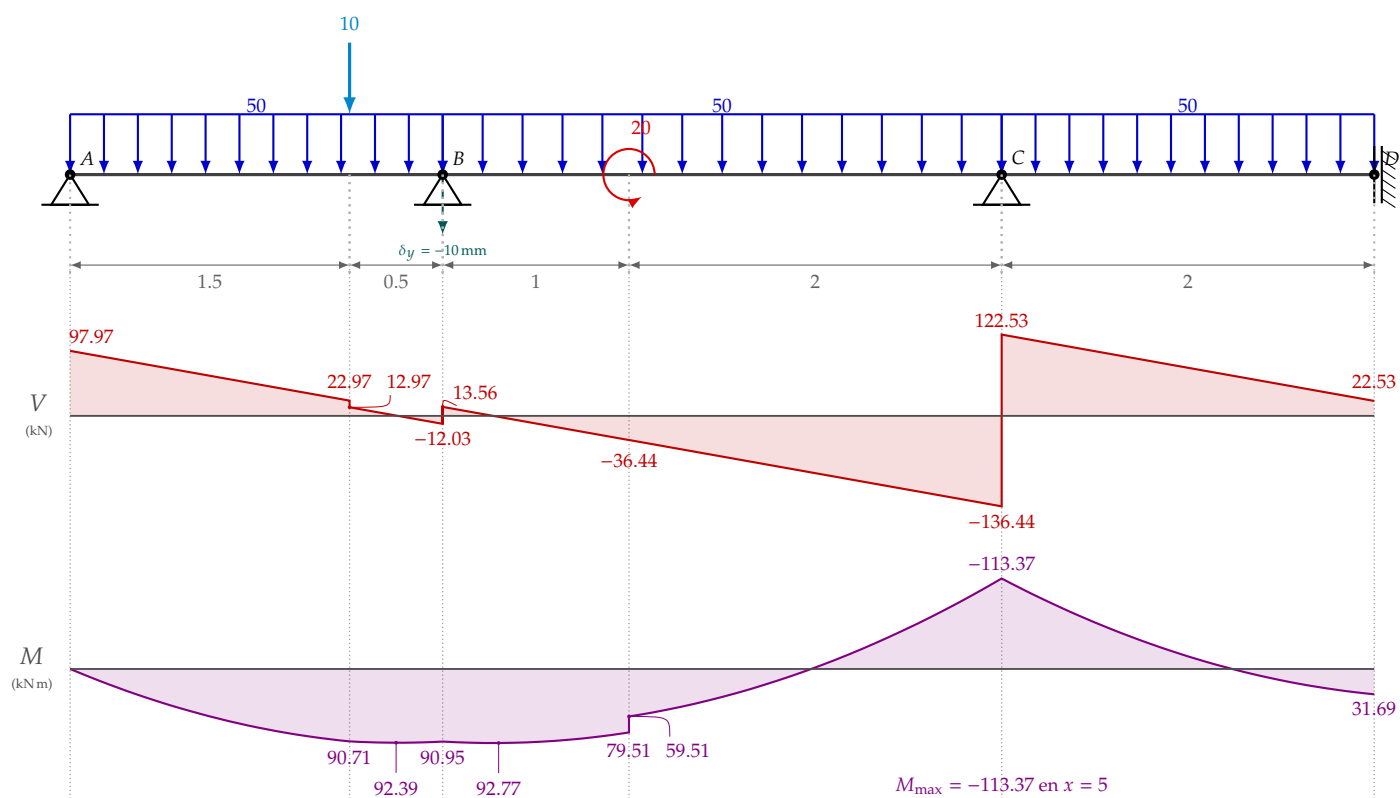
$$M_D = \hat{M}_{DC} = 31.69 \text{ kNm}$$



Reacciones en los apoyos.

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N , fuerza cortante V y momento flector M



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com