

Método matricial con restricciones cinemáticas

PÓRTICO

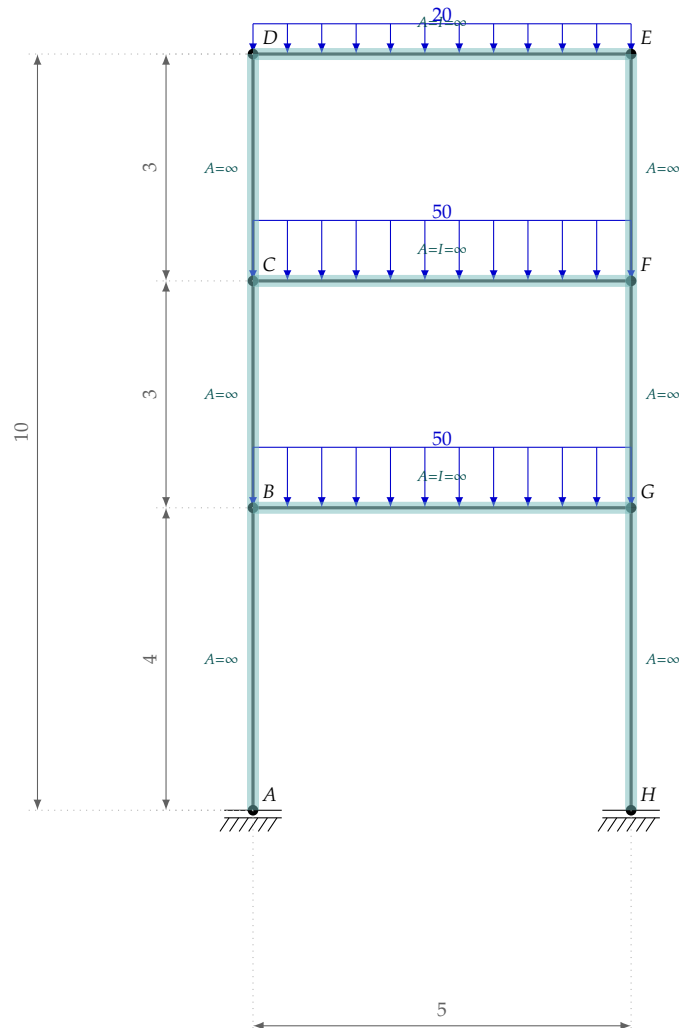
EMI · solución paso a paso

- las coordenadas **globales** q : los desplazamientos libres de los nudos;
- las coordenadas de **elemento** p : los giros y el alargamiento de cada barra.

$$p = A q, \quad K = A^T k A, \quad q = K^{-1} Q, \quad P = k p$$

Unidades de trabajo: L [m] F [kN] M [kN m] q [kN/m] δ [mm] E [kN/m²] A [m²] I [m⁴]

Datos de la estructura



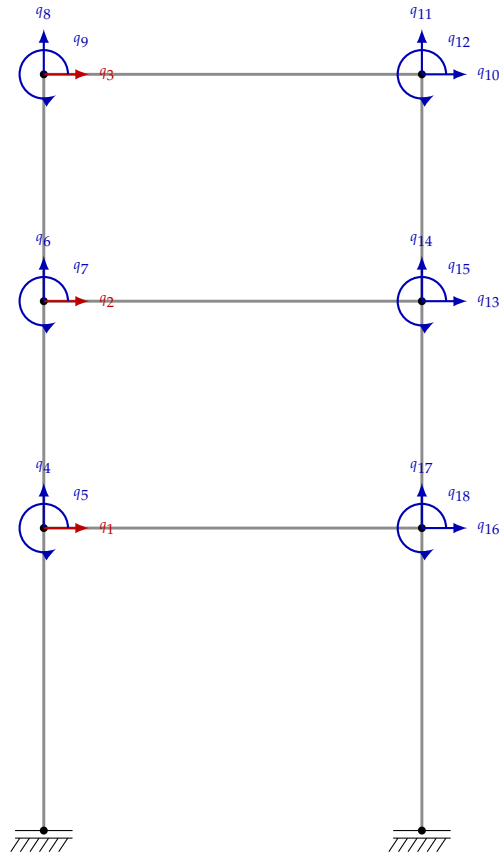
Geometría, apoyos y cargas. En trazo grueso verde, las barras con restricción cinemática.

Barra	Nudos	L (m)	E (kN/m ²)	A (m ²)	I (m ⁴)	Clase
1	A-B	4	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
2	B-C	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
3	C-D	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
4	D-E	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)
5	E-F	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
6	F-G	3	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
7	G-H	4	$2 \cdot 10^8$	∞	$1 \cdot 10^{-4}$	Axialmente rígida ($A = \infty$)
8	C-F	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)
9	B-G	5	$2 \cdot 10^8$	∞	∞	Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

Acción	Valor
Carga repartida D-E	$w = 20 \rightarrow 20 \text{ kN/m}$
Carga repartida C-F	$w = 50 \rightarrow 50 \text{ kN/m}$
Carga repartida B-G	$w = 50 \rightarrow 50 \text{ kN/m}$

1. Definición de los sistemas de coordenadas

1.1 Coordenadas globales q : los grados de libertad de los nudos



Coordenadas globales q : independientes en rojo (1 a NGL) y dependientes en azul.

Nudo	u	v	θ
A	—	—	—
B	q_1	q_4^+	q_5^+
C	q_2	q_6^+	q_7^+
D	q_3	q_8^+	q_9^+
E	q_{10}^+	q_{11}^+	q_{12}^+
F	q_{13}^+	q_{14}^+	q_{15}^+
G	q_{16}^+	q_{17}^+	q_{18}^+
H	—	—	—

Ecuaciones de ligadura

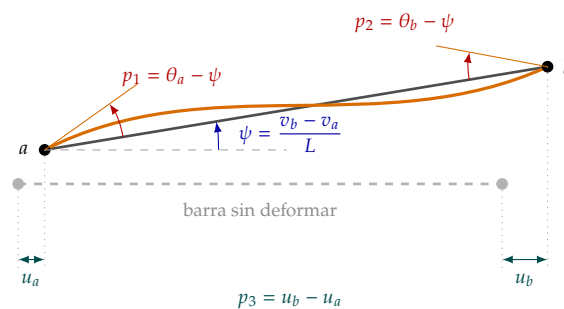
$$\begin{aligned}
 p_3^{(1)} (A = \infty) &= q_4 = 0 \\
 p_3^{(2)} (A = \infty) &= -q_4 + q_6 = 0 \\
 p_3^{(3)} (A = \infty) &= -q_6 + q_8 = 0 \\
 p_1^{(4)} (I = \infty) &= 0.2 q_8 + q_9 - 0.2 q_{11} = 0 \\
 p_2^{(4)} (I = \infty) &= 0.2 q_8 - 0.2 q_{11} + q_{12} = 0 \\
 p_3^{(4)} (A = \infty) &= -q_3 + q_{10} = 0 \\
 p_3^{(5)} (A = \infty) &= q_{11} - q_{14} = 0 \\
 p_3^{(6)} (A = \infty) &= q_{14} - q_{17} = 0 \\
 p_3^{(7)} (A = \infty) &= q_{17} = 0 \\
 p_1^{(8)} (I = \infty) &= 0.2 q_6 + q_7 - 0.2 q_{14} = 0 \\
 p_2^{(8)} (I = \infty) &= 0.2 q_6 - 0.2 q_{14} + q_{15} = 0 \\
 p_3^{(8)} (A = \infty) &= -q_2 + q_{13} = 0 \\
 p_1^{(9)} (I = \infty) &= 0.2 q_4 + q_5 - 0.2 q_{17} = 0 \\
 p_2^{(9)} (I = \infty) &= 0.2 q_4 - 0.2 q_{17} + q_{18} = 0 \\
 p_3^{(9)} (A = \infty) &= -q_1 + q_{16} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_4 &= 0 \\
 q_5 &= 0 \\
 q_6 &= 0 \\
 q_7 &= 0 \\
 q_8 &= 0 \\
 q_9 &= 0 \\
 q_{10} &= q_3 \\
 q_{11} &= 0 \\
 q_{12} &= 0 \\
 q_{13} &= q_2 \\
 q_{14} &= 0 \\
 q_{15} &= 0 \\
 q_{16} &= q_1 \\
 q_{17} &= 0 \\
 q_{18} &= 0
 \end{aligned}$$

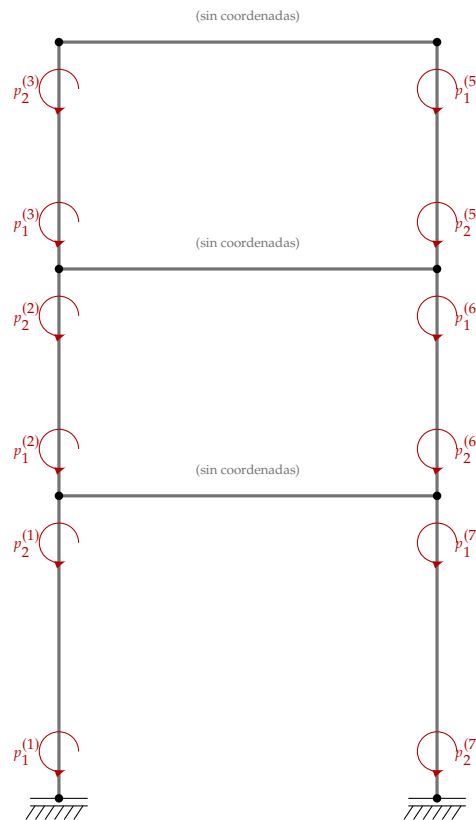
$$\text{NGL} = 18 - 15 = \boxed{3}$$

1.2 Coordenadas de elemento p : deformaciones de cada barra

$$p_1 = \theta_a - \psi, \quad p_2 = \theta_b - \psi, \quad p_3 = u_b - u_a, \quad \psi = \frac{v_b - v_a}{L}$$



Las tres coordenadas de elemento. Los giros p_1 y p_2 se miden entre la tangente y la **cuerda** (no entre la tangente y la posición inicial): por eso aparece ψ , y por eso un simple desplazamiento de nudo, sin que ningún nudo gire, ya deforma la barra.



Coordenadas de elemento sobre la estructura: en rojo los giros de extremo y en verde los alargamientos. En total, 12 coordenadas.

Fila	Coordenada	Barra	Significado
1	$p_1^{(1)}$	1 (A-B)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
2	$p_2^{(1)}$	1 (A-B)	giro del extremo final respecto de la cuerda
3	$p_1^{(2)}$	2 (B-C)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
4	$p_2^{(2)}$	2 (B-C)	giro del extremo final respecto de la cuerda
5	$p_1^{(3)}$	3 (C-D)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
6	$p_2^{(3)}$	3 (C-D)	giro del extremo final respecto de la cuerda
7	$p_1^{(5)}$	5 (E-F)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
8	$p_2^{(5)}$	5 (E-F)	giro del extremo final respecto de la cuerda
9	$p_1^{(6)}$	6 (F-G)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
10	$p_2^{(6)}$	6 (F-G)	giro del extremo final respecto de la cuerda
11	$p_1^{(7)}$	7 (G-H)	giro del extremo inicial respecto de la cuerda
12	$p_2^{(7)}$	7 (G-H)	giro del extremo final respecto de la cuerda

2. Matriz de rigidez no acoplada k

$$k = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \text{ sobre } (p_1, p_2, p_3)$$

2.1 Rigidez de cada barra

Barra 1 (A-B) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 4 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{4} = 20000, \quad \frac{2EI}{L} = 10000$$

$$k_1 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(1)} & p_2^{(1)} \\ \hline p_1^{(1)} & 2 & 1 \\ p_2^{(1)} & 1 & 2 \end{array}$$

Barra 2 (B–C) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_2 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(2)} & p_2^{(2)} \\ \hline p_1^{(2)} & 2.667 & 1.333 \\ p_2^{(2)} & 1.333 & 2.667 \end{array}$$

Barra 3 (C–D) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3 \text{ m}$, $\theta = 90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = 1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_3 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(3)} & p_2^{(3)} \\ \hline p_1^{(3)} & 2.667 & 1.333 \\ p_2^{(3)} & 1.333 & 2.667 \end{array}$$

Barra 4 (D–E) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

$L = 5 \text{ m}$, $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$.

Barra 5 (E–F) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3 \text{ m}$, $\theta = -90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_5 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(5)} & p_2^{(5)} \\ \hline p_1^{(5)} & 2.667 & 1.333 \\ p_2^{(5)} & 1.333 & 2.667 \end{array}$$

Barra 6 (F–G) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 3 \text{ m}$, $\theta = -90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{3} = 26670, \quad \frac{2EI}{L} = 13330$$

$$k_6 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(6)} & p_2^{(6)} \\ \hline p_1^{(6)} & 2.667 & 1.333 \\ p_2^{(6)} & 1.333 & 2.667 \end{array}$$

Barra 7 (G–H) — Axialmente rígida ($A = \infty$)

$L = 4 \text{ m}$, $\theta = -90^\circ$, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$.

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(2 \cdot 10^8)(1 \cdot 10^{-4})}{4} = 20000, \quad \frac{2EI}{L} = 10000$$

$$k_7 = 10^4 \cdot \begin{array}{c|cc} & p_1^{(7)} & p_2^{(7)} \\ \hline p_1^{(7)} & 2 & 1 \\ p_2^{(7)} & 1 & 2 \end{array}$$

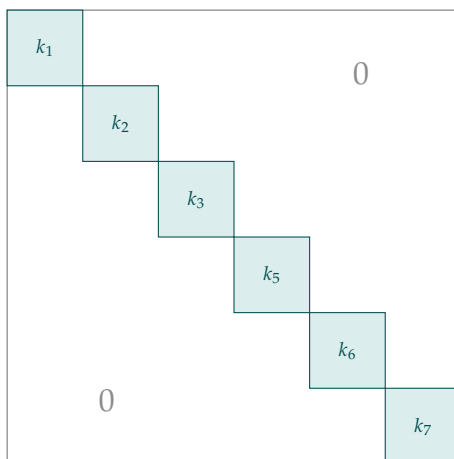
Barra 8 (C–F) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

$L = 5 \text{ m}$, $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$.

Barra 9 (B–G) — Totalmente rígida ($A = I = \infty$)

$L = 5 \text{ m}$, $\theta = 0^\circ$, $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$.

2.2 Ensamblaje diagonal por bloques



Estructura de k : un bloque por barra, de tamaño igual a su número de coordenadas. La matriz completa es 12×12 .

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & & & & & & & \\ & k_2 & & & & & & & & & & \\ & & k_3 & & & & & & & & & \\ & & & k_5 & & & & & & & & \\ & & & & k_6 & & & & & & & \\ & & & & & k_7 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

 $k = 10^4 \cdot$

	$p_1^{(1)}$	$p_2^{(1)}$	$p_1^{(2)}$	$p_2^{(2)}$	$p_1^{(3)}$	$p_2^{(3)}$	$p_1^{(5)}$	$p_2^{(5)}$	$p_1^{(6)}$	$p_2^{(6)}$	$p_1^{(7)}$	$p_2^{(7)}$
$p_1^{(1)}$	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_2^{(1)}$	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_1^{(2)}$	0	0	2.667	1.333	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_2^{(2)}$	0	0	1.333	2.667	0	0	0	0	0	0	0	0
$p_1^{(3)}$	0	0	0	0	2.667	1.333	0	0	0	0	0	0
$p_2^{(3)}$	0	0	0	0	1.333	2.667	0	0	0	0	0	0
$p_1^{(5)}$	0	0	0	0	0	0	2.667	1.333	0	0	0	0
$p_2^{(5)}$	0	0	0	0	0	0	1.333	2.667	0	0	0	0
$p_1^{(6)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	2.667	1.333	0	0
$p_2^{(6)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1.333	2.667	0	0
$p_1^{(7)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
$p_2^{(7)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2

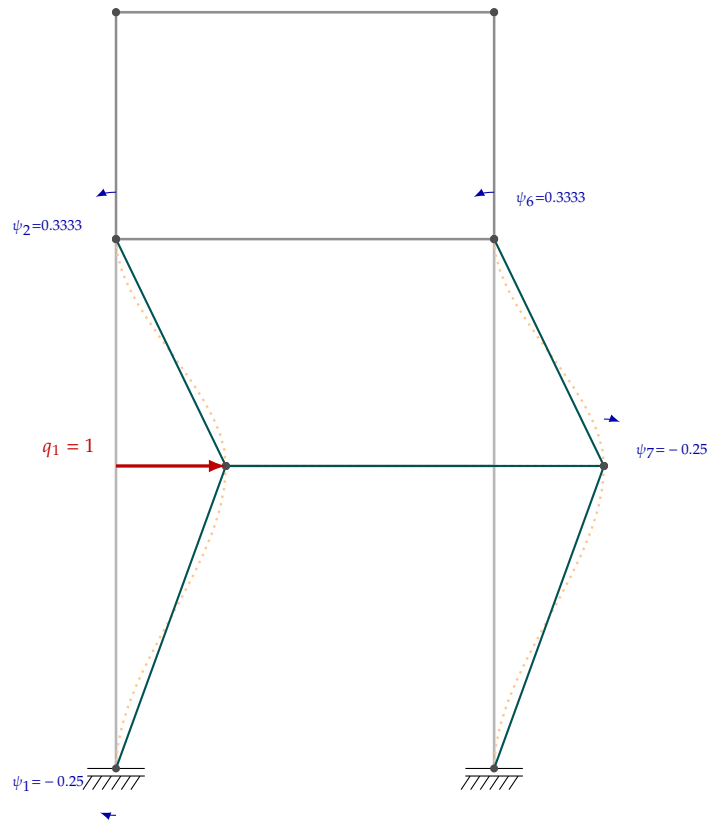
3. Construcción de la matriz de compatibilidad A

$$p = A q$$

$$u = q_x \cos \theta + q_y \sin \theta, \quad v = -q_x \sin \theta + q_y \cos \theta, \quad \psi = \frac{v_b - v_a}{L}$$

3.1 Estado $q_1 = 1$ — traslación horizontal del nudo B

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 0, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 0, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 1, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$



Estado $q_1 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En trazo continuo, la **cuerda** de cada barra en su posición desplazada (punteado, la elástica); en azul el giro de cuerda ψ , en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra.

Barra 1 (A-B) : $L = 4, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1 - (0)}{4} = -0.25$$

$$p_1^{(1)} = \theta_a - \psi = 0.25, \quad p_2^{(1)} = \theta_b - \psi = 0.25$$

Barra 2 (B-C) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = -1, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0 - (-1)}{3} = 0.3333$$

$$p_1^{(2)} = \theta_a - \psi = -0.3333, \quad p_2^{(2)} = \theta_b - \psi = -0.3333$$

Barra 6 (F-G) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{1 - (0)}{3} = 0.3333$$

$$p_1^{(6)} = \theta_a - \psi = -0.3333, \quad p_2^{(6)} = \theta_b - \psi = -0.3333$$

Barra 7 (G-H) : $L = 4, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

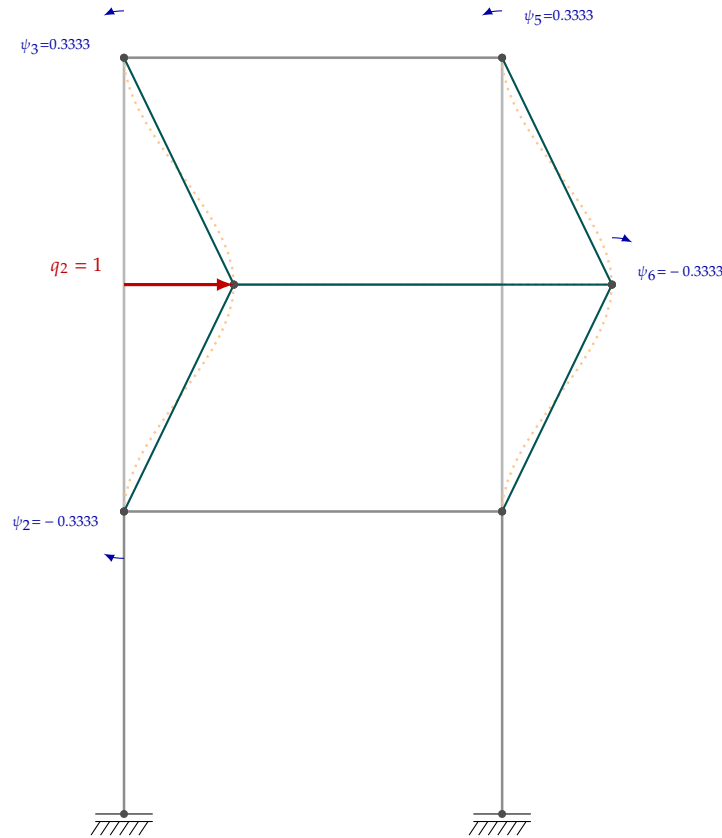
$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0 - (1)}{4} = -0.25$$

$$p_1^{(7)} = \theta_a - \psi = 0.25, \quad p_2^{(7)} = \theta_b - \psi = 0.25$$

$$\text{columna 1 de } A = (0.25, 0.25, -0.3333, -0.3333, 0, 0, 0, 0, -0.3333, -0.3333, 0.25, 0.25)^T$$

3.2 Estado $q_2 = 1$ — traslación horizontal del nudo C

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 0, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 1, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$



Estado $q_2 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En trazo continuo, la **cuerda** de cada barra en su posición desplazada (punteado, la elástica); en azul el giro de cuerda ψ , en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra.

Barra 2 (B-C) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1 - (0)}{3} = -0.3333$$

$$p_1^{(2)} = \theta_a - \psi = 0.3333, \quad p_2^{(2)} = \theta_b - \psi = 0.3333$$

Barra 3 (C-D) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = -1, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0 - (-1)}{3} = 0.3333$$

$$p_1^{(3)} = \theta_a - \psi = -0.3333, \quad p_2^{(3)} = \theta_b - \psi = -0.3333$$

Barra 5 (E-F) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{1 - (0)}{3} = 0.3333$$

$$p_1^{(5)} = \theta_a - \psi = -0.3333, \quad p_2^{(5)} = \theta_b - \psi = -0.3333$$

Barra 6 (F-G) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

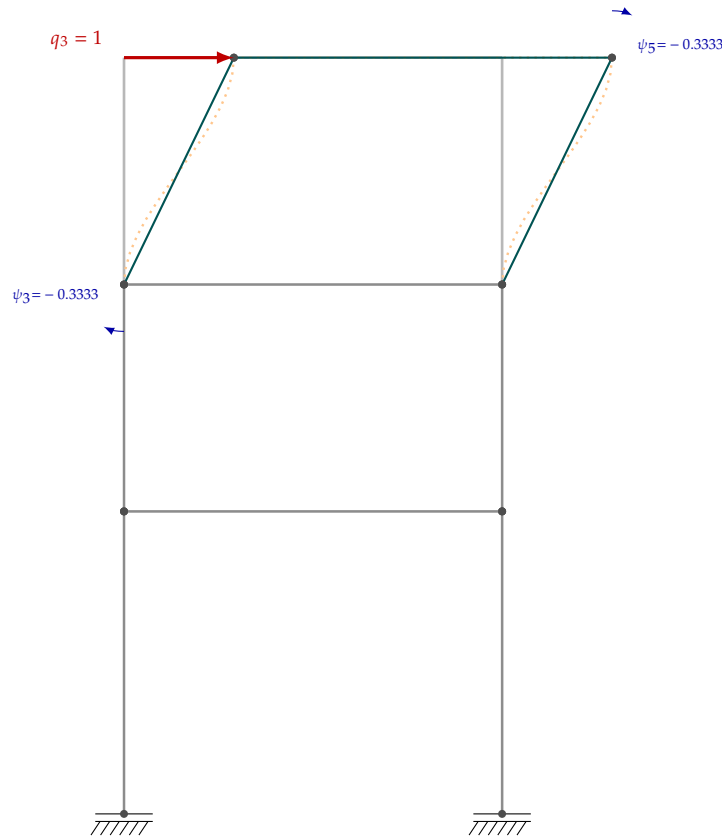
$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0 - (1)}{3} = -0.3333$$

$$p_1^{(6)} = \theta_a - \psi = 0.3333, \quad p_2^{(6)} = \theta_b - \psi = 0.3333$$

columna 2 de $A = (0, 0, 0.3333, 0.3333, -0.3333, -0.3333, -0.3333, -0.3333, 0.3333, 0.3333, 0, 0)^T$

3.3 Estado $q_3 = 1$ — traslación horizontal del nudo D

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 1, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 0, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$



Estado $q_3 = 1$ con los demás GDL independientes nulos. En trazo continuo, la **cuerda** de cada barra en su posición desplazada (punteado, la elástica); en azul el giro de cuerda ψ , en verde el alargamiento y en rojo la descomposición del desplazamiento en ejes de la barra.

Barra 3 (C-D) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 0, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = -1, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{-1 - (0)}{3} = -0.3333$$

$$p_1^{(3)} = \theta_a - \psi = 0.3333, \quad p_2^{(3)} = \theta_b - \psi = 0.3333$$

Barra 5 (E-F) : $L = 3, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$

$$u_a = 0, \quad v_a = 1, \quad \theta_a = 0 \quad u_b = 0, \quad v_b = 0, \quad \theta_b = 0$$

$$\psi = \frac{v_b - v_a}{L} = \frac{0 - (1)}{3} = -0.3333$$

$$p_1^{(5)} = \theta_a - \psi = 0.3333, \quad p_2^{(5)} = \theta_b - \psi = 0.3333$$

columna 3 de $A = (0, 0, 0, 0, 0.3333, 0.3333, 0.3333, 0.3333, 0, 0, 0, 0)^T$

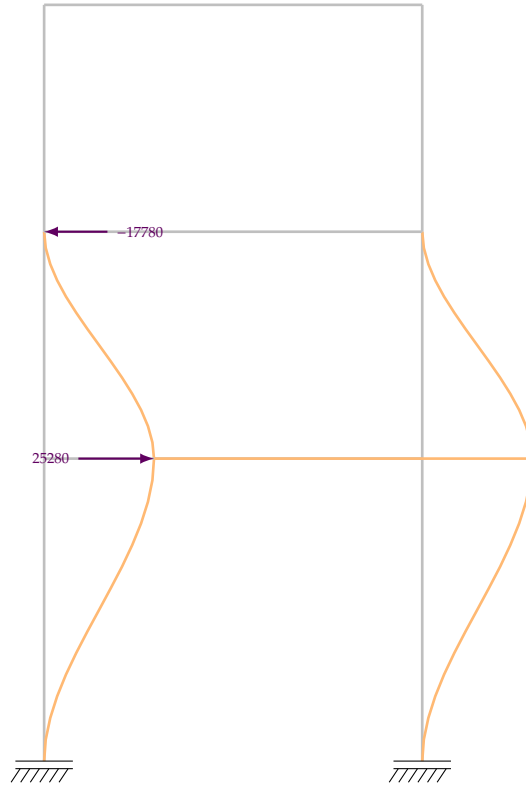
Matriz de compatibilidad completa

	q_1	q_2	q_3
$p_1^{(1)}$	0.25	0	0
$p_2^{(1)}$	0.25	0	0
$p_1^{(2)}$	-0.3333	0.3333	0
$p_2^{(2)}$	-0.3333	0.3333	0
$p_1^{(3)}$	0	-0.3333	0.3333
$p_2^{(3)}$	0	-0.3333	0.3333
$p_1^{(5)}$	0	-0.3333	0.3333
$p_2^{(5)}$	0	-0.3333	0.3333
$p_1^{(6)}$	-0.3333	0.3333	0
$p_2^{(6)}$	-0.3333	0.3333	0
$p_1^{(7)}$	0.25	0	0
$p_2^{(7)}$	0.25	0	0

4. Ensamblaje de la matriz estructural K

$$Q = A^T P = A^T k A q \implies K = A^T k A$$

$$K = A^T k A = 10^4 \cdot \begin{array}{c|ccc} & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline q_1 & 2.528 & -1.778 & 0 \\ q_2 & -1.778 & 3.556 & -1.778 \\ q_3 & 0 & -1.778 & 1.778 \end{array}$$

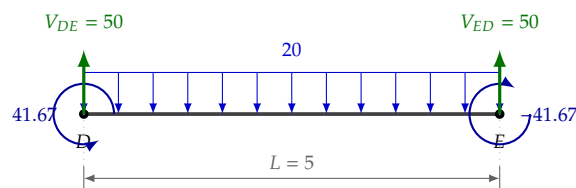


Interpretación de la primera columna de K : fuerzas necesarias para sostener el estado $q_1 = 1$. Las asociadas a una traslación están en kN por unidad de desplazamiento; las de un giro, en kN m por radián.

5. Cálculo de los desplazamientos

5.1 Vector de cargas Q

Barra 4 (D-E)



Cuerpo libre de D-E biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $y+y'$ positivos).

$$w_1 = 20, \quad w_2 = 20 \text{ kN/m}$$

Fórmula

$$MEP_{DE} = +\frac{wL^2}{12}, \quad MEP_{ED} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$MEP_{DE} = +\frac{(20)(5)^2}{12}, \quad MEP_{ED} = -\frac{(20)(5)^2}{12}$$

Resultado

$$MEP_{DE} = 41.67 \text{ kN m}, \quad MEP_{ED} = -41.67 \text{ kN m}$$

Fórmula

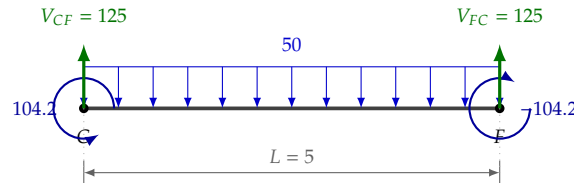
$$V_{DE} = V_{ED} = \frac{(20)(5)}{2}$$

$$V_{DE} = 50 \text{ kN}, \quad V_{ED} = 50 \text{ kN}$$

Comprobación

$$V_{DE} + V_{ED} = 50 + (50) = 100 \text{ kN } \checkmark$$

$$f_4^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 41.67 \\ 0 \\ 50 \\ -41.67 \end{bmatrix} \quad (\text{ejes locales: } [N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b])$$

Barra 8 (C–F)

Cuerpo libre de C–F biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

$$w_1 = 50, \quad w_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Fórmula

$$\text{MEP}_{CF} = +\frac{wL^2}{12}, \quad \text{MEP}_{FC} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$\text{MEP}_{CF} = +\frac{(50)(5)^2}{12}, \quad \text{MEP}_{FC} = -\frac{(50)(5)^2}{12}$$

Resultado

$$\boxed{\text{MEP}_{CF} = 104.2 \text{ kN m}}, \quad \boxed{\text{MEP}_{FC} = -104.2 \text{ kN m}}$$

Fórmula

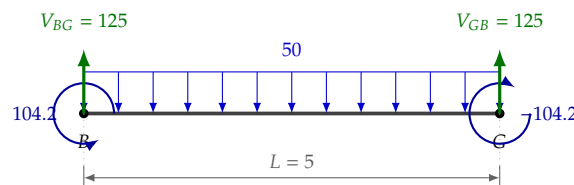
$$V_{CF} = V_{FC} = \frac{(50)(5)}{2}$$

$$\boxed{V_{CF} = 125 \text{ kN}}, \quad \boxed{V_{FC} = 125 \text{ kN}}$$

Comprobación

$$V_{CF} + V_{FC} = 125 + (125) = 250 \text{ kN } \checkmark$$

$$f_8^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 125 \\ 104.2 \\ 0 \\ 125 \\ -104.2 \end{bmatrix} \quad (\text{ejes locales: } [N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b])$$

Barra 9 (B–G)

Cuerpo libre de B–G biempotrada: las cargas del vano, los MEP y las reacciones de empotramiento que las equilibran (antihorario y $+y'$ positivos).

$$w_1 = 50, \quad w_2 = 50 \text{ kN/m}$$

Fórmula

$$\text{MEP}_{BG} = +\frac{wL^2}{12}, \quad \text{MEP}_{GB} = -\frac{wL^2}{12}$$

Reemplazo

$$\text{MEP}_{BG} = +\frac{(50)(5)^2}{12}, \quad \text{MEP}_{GB} = -\frac{(50)(5)^2}{12}$$

Resultado

$$\boxed{\text{MEP}_{BG} = 104.2 \text{ kN m}}, \quad \boxed{\text{MEP}_{GB} = -104.2 \text{ kN m}}$$

Fórmula

$$V_{BG} = V_{GB} = \frac{(50)(5)}{2}$$

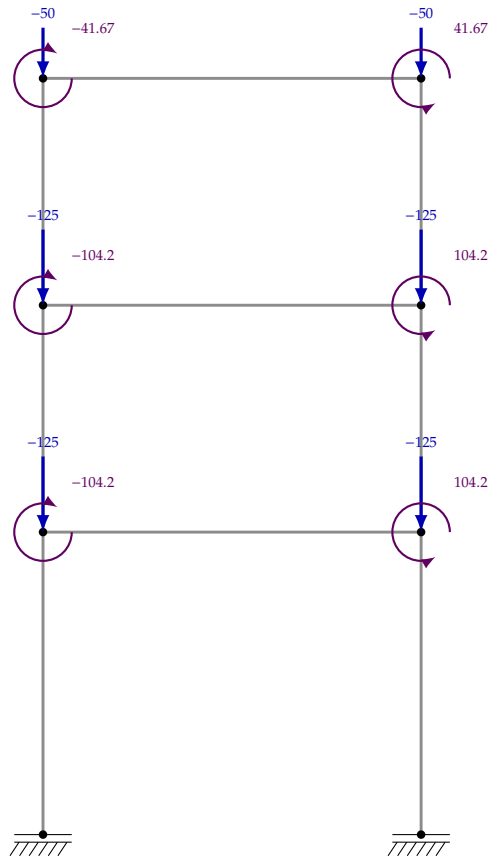
Comprobación

$$V_{BG} = 125 \text{ kN},$$

$$V_{GB} = 125 \text{ kN}$$

$$V_{BG} + V_{GB} = 125 + (125) = 250 \text{ kN} \checkmark$$

$$f_9^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 125 \\ 104.2 \\ 0 \\ 125 \\ -104.2 \end{bmatrix} \quad (\text{ejes locales: } [N_a, V_a, M_a, N_b, V_b, M_b])$$



Cargas nodales equivalentes: las aplicadas directamente en los nudos más las de empotramiento perfecto cambiadas de signo (en kN y kN m). Solo las componentes de los GDL libres entran en Q ; las de los apoyos las absorben las reacciones.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ -125 \\ -104.2 \\ 0 \\ -125 \\ -104.2 \\ 0 \\ -50 \\ -41.67 \\ 0 \\ -50 \\ 41.67 \\ 0 \\ -125 \\ 104.2 \\ 0 \\ -125 \\ 104.2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \Gamma^T F$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.2 Resolución del sistema $Kq = Q$

$$q = K^{-1}Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = 0, \quad q_5 = 0, \quad q_6 = 0, \quad q_7 = 0, \quad q_8 = 0, \quad q_9 = 0, \quad q_{10} = 0, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{13} = 0, \quad q_{14} = 0, \quad q_{15} = 0, \quad q_{16} = 0, \quad q_{17} = 0, \quad q_{18} = 0$$

Nudo	u (mm)	v (mm)	θ (rad)
A	0	0	0
B	0	0	0
C	0	0	0
D	0	0	0
E	0	0	0
F	0	0	0
G	0	0	0
H	0	0	0

6. Obtención de las fuerzas internas

6.1 Deformaciones reales de cada barra

$$p = Aq$$

6.2 Fuerzas de barra

$$P = k p + P^0, \quad P^0 = (\text{MEP}_a, \text{MEP}_b, N^0)$$

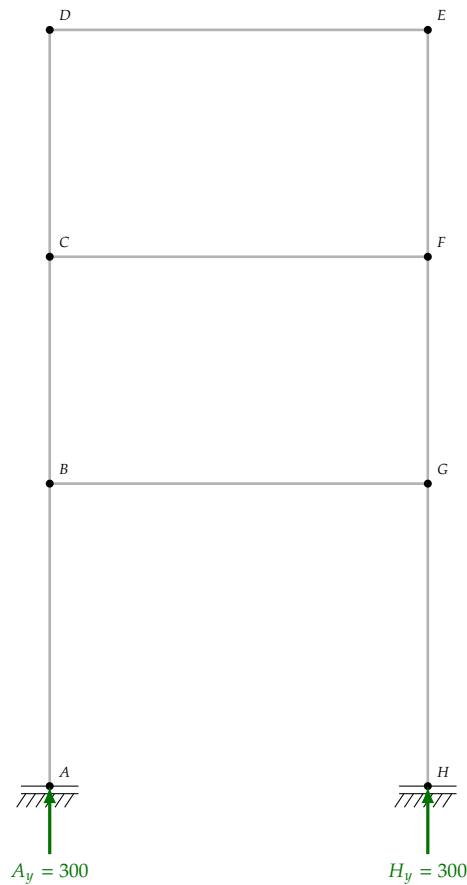
Barra	p_1 (rad)	p_2 (rad)	p_3 (m)	M_a (kN m)	M_b (kN m)	N (kN)
1	0	0	0 ⁰	0	0	-300 ^λ
2	0	0	0 ⁰	0	0	-175 ^λ
3	0	0	0 ⁰	0	0	-50 ^λ
4	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	-41.67 ^λ	41.67 ^λ	0 ^λ
5	0	0	0 ⁰	0	0	-50 ^λ
6	0	0	0 ⁰	0	0	-175 ^λ
7	0	0	0 ⁰	0	0	-300 ^λ
8	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	-104.2 ^λ	104.2 ^λ	0 ^λ
9	0 ⁰	0 ⁰	0 ⁰	-104.2 ^λ	104.2 ^λ	0 ^λ

6.3 Fuerzas de extremo y reacciones

$$V_a = \frac{M_a + M_b + f_{eq,M_a}^0 + f_{eq,M_b}^0}{L} - f_{eq,V_a}^0$$

Barra	N_a	V_a	M_a	N_b	V_b	M_b
1 (A-B)	300	0	0	-300	0	0
2 (B-C)	175	0	0	-175	0	0
3 (C-D)	50	0	0	-50	0	0
4 (D-E)	0	50	-41.67	0	50	41.67
5 (E-F)	50	0	0	-50	0	0
6 (F-G)	175	0	0	-175	0	0
7 (G-H)	300	0	0	-300	0	0
8 (C-F)	0	125	-104.2	0	125	104.2
9 (B-G)	0	125	-104.2	0	125	104.2

Nudo	$\cdot_x$ (kN)	$\cdot_y$ (kN)	M (kN m)
A	0	300	0
H	0	300	0



Reacciones en los apoyos (kN y kN m).

Verificación del equilibrio

$$\sum F_x : 0 + (0) = 0 \approx 0, \quad \sum F_y : 600 + (-600) = 0 \approx 0$$

Diagramas de fuerzas internas

Esfuerzo axial N , fuerza cortante V y momento flector M

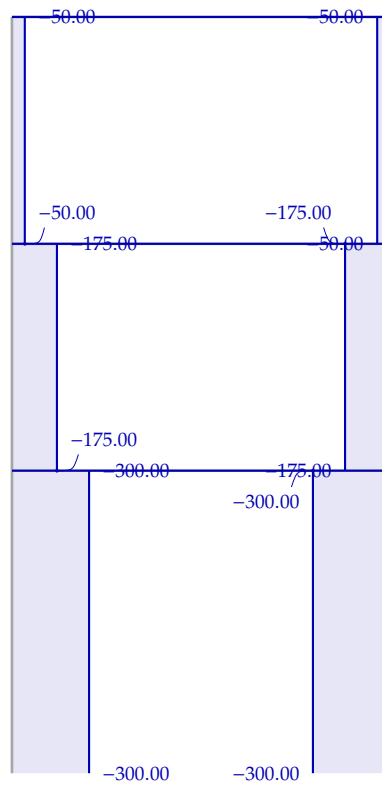


Diagrama de fuerza axial (N)

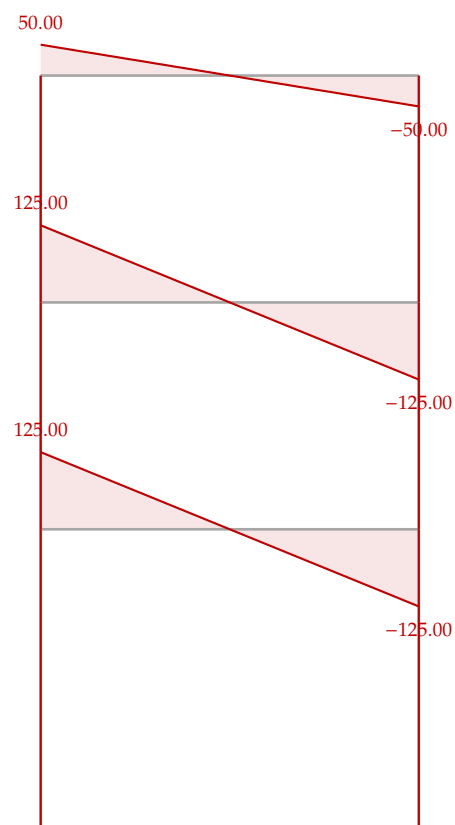


Diagrama de fuerza cortante (V)

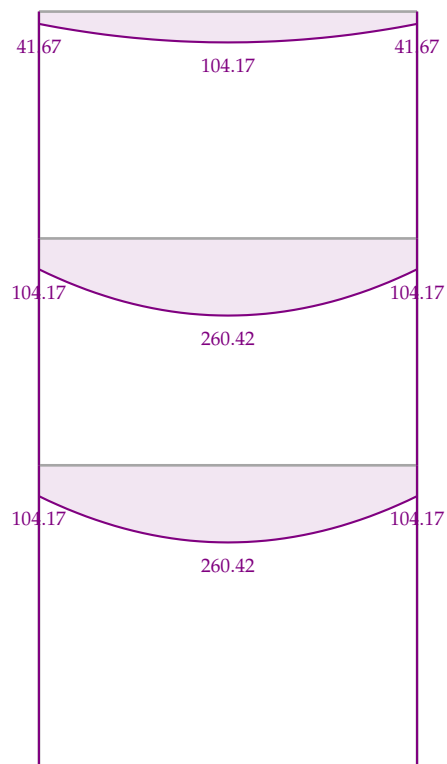
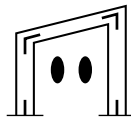


Diagrama de momento flector (M)



Generado con EMI: calculadora estructural online: emiestruc.com